

EXERCICE 3 Mathématiques Mexique 2023

Question 1

1.

L'équation (E) : $y' = -2y + 40$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -2$ et $b = 40$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = Ce^{-2x} - \frac{40}{-2}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = Ce^{-2x} + 20, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.

La condition $f(0) = 200$ donne :

$$Ce^0 + 20 = 200$$

$$C + 20 = 200$$

$$C = 200 - 20$$

$$C = 180$$

La solution cherchée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 180e^{-2x} + 20.$$

Question 2

$$f(x) = (x - 1)e^x$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

En écrivant $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^x$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$, donc pour tout réel x :

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f'(x) = 1 \times e^x + (x - 1)e^x$$

$$f'(x) = e^x(1 + (x - 1))$$

$$f'(x) = xe^x$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de x :

- pour $x < 0$, $f'(x) < 0$;
- $f'(0) = 0$;
- pour $x > 0$, $f'(x) > 0$.

Ceci justifie bien le signe de $f'(x)$ annoncé dans le tableau.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Question 3

1.

D'après les propriétés de la forme exponentielle :

$$z_1 \times z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})}$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi \times 4}{3 \times 4} + \frac{\pi \times 3}{4 \times 3})}$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12})}$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

2.

On en déduit la forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$:

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$$

Question 4

1.

Au 1^{er} janvier 2020, $t = 0$, donc :

$$f(0) = 10e^0$$

$$f(0) = 10$$

D'après ce modèle, l'effectif de la population au 1^{er} janvier 2020 est donc estimé à 10 millions d'habitants.

Au 1^{er} janvier 2021, $t = 1$, donc :

$$f(1) = 10e^{0,02}$$

$$f(1) = 10,2$$

D'après ce modèle, l'effectif de la population au 1^{er} janvier 2021 est donc estimé à environ 10,20 millions d'habitants.

2.

On cherche les valeurs de t pour lesquelles $f(t) > 20$:

$$10e^{0,02t} > 20$$

$$e^{0,02t} > 2$$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, cette inégalité équivaut à :

$$\ln(e^{0,02t}) > \ln(2)$$

$$0,02t > \ln(2)$$

$$t > \frac{\ln(2)}{0,02}$$

$$t > 50\ln(2)$$

$$t > 34,66$$

Puisque $t = 34$ correspond au 1^{er} janvier 2054 et $t = 35$ au 1^{er} janvier 2055, et que $34 < 34,66 < 35$, l'effectif de la population dépassera 20 millions d'habitants au cours de l'année 2054.