

CLASSE : Terminale STI2D

EXERCICE 3 : 4 points

VOIE : ☐ Générale

ENSEIGNEMENT : Physique-chimie

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54

CALCULATRICE AUTORISÉE : ☒ Oui sans mémoire, « type collègue »

EXERCICE 3

Mathématiques Nouvelle-Calédonie 2023

Question 1

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

a)

Le module de z_1 est :

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$|z_1| = \sqrt{2 + 2}$$

$$|z_1| = \sqrt{4}$$

$$|z_1| = 2$$

On peut donc écrire $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

Un argument θ de z_1 vérifie donc :

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{soit } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

La forme exponentielle de z_1 est donc :

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

b) On a :

$$z_2^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = e^{i\frac{3\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc :

$$2z_2^3 = 2\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$2z_2^3 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$2z_2^3 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$2z_2^3 = z_1$$

On a donc bien montré que $2z_2^3 = z_1$.

Question 2

$$f(x) = (10x - 4)e^{-x}$$

a)

Le point A a pour abscisse 1, donc son ordonnée est :

$$f(1) = (10 \times 1 - 4)e^{-1}$$

$$f(1) = 6e^{-1}$$

$$f(1) = \frac{6}{e}$$

b)

$$f'(x) = (-10x + 14)e^{-x}$$

$$f'(1) = (-10 \times 1 + 14)e^{-1}$$

$$f'(1) = 4e^{-1}$$

$$f'(1) = \frac{4}{e}$$

Le nombre $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

c)

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x) = (-10x + 14)e^{-x}$ est celui de $-10x + 14$.

$$-10x + 14 = 0$$

$$-10x = -14$$

$$x = \frac{14}{10}$$

$$x = \frac{7}{5}$$

Sur l'intervalle $[1; 2]$:

- pour $x \in \left[1; \frac{7}{5}\right]$, $-10x + 14 > 0$ donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante ;
- pour $x \in \left]\frac{7}{5}; 2\right]$, $-10x + 14 < 0$ donc $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante.

La fonction f admet donc bien un maximum sur $[1; 2]$, atteint en $x = \frac{7}{5}$, de valeur exacte :

$$f\left(\frac{7}{5}\right) = \left(10 \times \frac{7}{5} - 4\right)e^{-\frac{7}{5}}$$

$$f\left(\frac{7}{5}\right) = (14 - 4)e^{-\frac{7}{5}}$$

$$f\left(\frac{7}{5}\right) = 10e^{-\frac{7}{5}}$$