

CLASSE : Terminale STI2D

EXERCICE 3 : 4 points

VOIE : ☒ Générale

ENSEIGNEMENT : Physique-chimie

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54

CALCULATRICE AUTORISÉE : ☒ Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Nouvelle-Calédonie 2025

Partie I

1.

$$f(x) = 6x^3 + 6x^2$$

Une primitive de f sur $[0 ; 1]$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{6}{4}x^4 + \frac{6}{3}x^3 = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3$.

Donc :

$$\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1$$

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} \times 1^4 + 2 \times 1^3 - \left(\frac{3}{2} \times 0^4 + 2 \times 0^3 \right)$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{3}{2} + 2 \right) - 0$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{2}$$

2.

Comme f est positive sur $[0 ; 1]$, l'intégrale $\int_0^1 f(x) dx$ représente, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_2$, l'axe des abscisses (le segment $[OC]$), et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$: il s'agit donc de l'aire du domaine grisé $\mathcal{D}_1$.

On a donc :

$$\text{Aire}(\mathcal{D}_1) = \frac{7}{2} \text{ unité d'aire.}$$

3.

Les domaines $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ partagent le rectangle $OABC$, dont l'aire est :

$$\text{Aire}(OABC) = OC \times OA = 1 \times 12 = 12 \text{ unités d'aire.}$$

On a donc :

$$\text{Aire}(\mathcal{D}_1) + \text{Aire}(\mathcal{D}_2) + \text{Aire}(\mathcal{D}_3) = 12$$

Soit :

$$\text{Aire}(\mathcal{D}_3) = 12 - \text{Aire}(\mathcal{D}_1) - \text{Aire}(\mathcal{D}_2)$$

$$\text{Aire}(\mathcal{D}_3) = 12 - \frac{7}{2} - \frac{135}{32}$$

En réduisant au même dénominateur 32 :

$$\text{Aire}(\mathcal{D}_3) = 12 \times \frac{32}{32} - \frac{7 \times 16}{2 \times 16} - \frac{135}{32}$$

$$\text{Aire}(\mathcal{D}_3) = \frac{384}{32} - \frac{112}{32} - \frac{135}{32}$$

$$\text{Aire}(\mathcal{D}_3) = \frac{137}{32}$$

L'aire du domaine $\mathcal{D}_3$ est d $\frac{137}{32}$ unité d'aire.

Partie II

4.

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_1 = |z_1|e^{i\theta}$$

z_1 est de la forme $a + ib$ avec $a = 1$ et $b = -\sqrt{3}$.

Le module de z_1 est :

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$|z_1| = \sqrt{1 + 3}$$

$$|z_1| = \sqrt{4}$$

$$|z_1| = 2$$

Un argument θ de z_1 vérifie donc :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z_1|}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z_1|}$$

$$\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{soit } \theta = -\frac{\pi}{3}.$$

La forme exponentielle de z_1 est donc :

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

5.

$$z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

D'après la question précédente, $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$, donc :

$$z_1^2 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$z_1^2 = 2^2 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_1^2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

Donc :

$$Z = z_1^2 \times z_2$$

$$Z = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times 4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z = 16 e^{i\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$Z = 16 e^{i\left(-\frac{4\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$Z = 16 e^{i\left(-\frac{3\pi}{6}\right)}$$

$$Z = 16 e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$Z = 16 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$Z = 16(0 - i)$$

$$Z = -16i$$

La partie réelle de Z est nulle et $Z \neq 0$, donc Z est bien un nombre imaginaire pur.