EXERCICE 3

Mathématiques Polynésie 2022

Question 1

L'équation $(E) : y' = -0{,}1y + 7$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}1$ et $b = 7$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $f(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$\theta(t) = Ce^{-0{,}1\,t} - \frac{7}{-0{,}1}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

$\theta(t) = Ce^{-0{,}1t} + 70, \quad C \in \mathbb{R}$.

On sait que $\theta(0) = 150$

$\theta(0) = Ce^0 + 70 = C + 70 = 150$

$C = 150 - 70$

$C = 80$

Donc

$\theta(t) = 80e^{-0{,}1t} + 70$

Question 2

a.

Le module de z est :

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2}$

$|z| = \sqrt{1+1}$

$|z| = \sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{-1 \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

On a donc $z = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b.

D'après la question précédente :

$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\times 4\times\frac{3\pi}{4}}$

$z^4 = 4\,\mathrm{e}^{i3\pi}$

Or $3\pi \equiv \pi \ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, donc $\mathrm{e}^{i3\pi} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1$, d'où :
$z^4 = 4 \times (-1) + 0$

Le nombre z^4 est donc réel : sa partie imaginaire est 0.

Question 3

On cherche l'instant t_0 à partir duquel $E(t) = \frac{18}{2} = 9$:

$18(1 - \mathrm{e}^{-0{,}45t}) = 9$
$18(1 - \mathrm{e}^{-0{,}45t}) = \dfrac{9}{18}$
$1 - \mathrm{e}^{-0{,}45t} = \dfrac{1}{2}$
$-\mathrm{e}^{-0{,}45t} = \dfrac{1}{2} - 1$
$-\mathrm{e}^{-0{,}45t} = -\dfrac{1}{2}$
$\mathrm{e}^{-0{,}45t} = \dfrac{1}{2}$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, cette égalité équivaut à :

$\ln(\mathrm{e}^{-0{,}45t}) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$
$-0{,}45t = -\ln(2)$
$t = \dfrac{\ln(2)}{0{,}45}$
$t = 1{,}54$ heure
$t = 1$ h 32 min

Question 4

Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x) = \frac{-3x+2}{x}$ est celui de $-3x + 2$.

$-3x + 2 = 0$
$-3x = -2$
$x = \dfrac{2}{3}$

Ainsi :

- pour $x \in \left]0\,;\,\frac{2}{3}\right[$, $-3x + 2 > 0$ donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante ;
- pour $x \in \left]\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$, $-3x + 2 < 0$ donc $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\left]0\,;\,\frac{2}{3}\right]$, puis strictement décroissante sur $\left[\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

Question 5

$3\ln(x) - \ln(x+30) = 2\ln(5)$
$\ln(x^3) - \ln(x+30) = \ln(5^2)$
$\ln\left(\frac{x^3}{x+30}\right) = \ln(25)$

$\frac{x^3}{x+30} = 25$
$x^3 = 25(x+30)$
$x^3 = 25x + 750$

On ne sait pas résoudre cette équation donc on essaye avec des chiffres proposés.
Pour x=0 :
$0^3 \neq 25 \times 0 + 750$
$0^3 \neq 750$

Pour x=e^{-5} :
$(e^{-5})^3 \neq 25 \times e^{-5} + 750$
$0^3 \neq 750$

Pour x=10 :
$(10)^3 = 25 \times 10 + 750$
$1000 = 250 + 750$
$1000 = 1000$

La réponse exacte est donc la réponse c.

Question 6

a.

La hauteur initiale de la nacelle est :
$h(0) = -15\mathrm{e}^0 + 18$
$h(0) = -15 + 18$
$h(0) = 3$
La hauteur initiale de la nacelle est donc de 3 mètres.

b.

Comme $-0{,}2 < 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,2t} = 0$, donc :
$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (-15\mathrm{e}^{-0,2t} + 18) = 0 + 18 = 18$

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au cours du temps, la hauteur de la nacelle se rapproche de plus en plus de 18 mètres, sans jamais le dépasser : la nacelle atteint donc une hauteur maximale d'environ 18 mètres.