

Polynésie 2023	
CORRECTION Nathalie Leclercq © https://www.vecteurbac.fr/	
CLASSE : Terminale STI2D	EXERCICE 3 : 4 points
VOIE : ☒ Générale	ENSEIGNEMENT : Physique-chimie
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	CALCULATRICE AUTORISÉE : ☒ Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Polynésie 2023

Question 1

a)

On a $f(x) = xe^{-x}$.

Par croissances comparées, on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$.

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b)

$$f(x) = xe^{-x}$$

La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. En écrivant $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$, donc pour tout réel $x \in [0; +\infty[$:

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$$

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

c)

Pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $e^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

$$1 - x = 0$$

$$x = 1$$

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $[0; 1[$, $f'(1) = 0$, et $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

On calcule les valeurs particulières :

$$f(0) = 0 \times e^0 = 0$$

$$f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Le tableau complet des variations de f sur $[0; +\infty[$ est donc :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0

Question 2

a)

Le module de z_2 est :

$$|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$|z_2| = \sqrt{3+1}$$

$$|z_2| = \sqrt{4}$$

$$|z_2| = 2$$

On peut donc écrire $z_2 = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$.

Un argument θ de z_2 vérifie donc :

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{soit } \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

La forme exponentielle de z_2 est donc :

$$z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

b) D'après la question précédente :

$$z_2^3 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6}} \right)^3$$

$$z_2^3 = 2^3 e^{i\frac{15\pi}{6}}$$

$$z_2^3 = 8e^{i\frac{5\pi}{2}}$$

Or $\frac{5\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$, donc $e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, soit :

$$z_2^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

On en déduit :

$$Z = \frac{z_1}{z_2^3}$$

$$Z = \frac{6e^{i\frac{\pi}{4}}}{8e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$Z = \frac{6}{8} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})}$$

$$Z = \frac{3}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$