

Sujet zéro n°1	
CORRECTION Nathalie Leclercq © https://www.vecteurbac.fr/	
CLASSE : Terminale STI2D	EXERCICE 3 : 4 points
VOIE : ☒ Générale	ENSEIGNEMENT : Physique-chimie
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 0h54	CALCULATRICE AUTORISÉE : ☒ Oui sans mémoire, « type collège »

EXERCICE 3

Mathématiques Sujet zéro n°1

Question 1

a.

L'équation (E) : $y' + 100y = 8$ équivaut à $y' = -100y + 8$, qui est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -100$ et $b = 8$.

Les solutions de l'équation sont de la forme :

$$v(t) = Ce^{at} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$v(t) = Ce^{-100t} - \frac{8}{-100}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$v(t) = Ce^{-100t} + 0,08, \quad C \in \mathbb{R}$$

La condition $v(0) = 0$ donne :

$$Ce^0 + 0,08 = 0$$

$$C + 0,08 = 0$$

$$C = -0,08$$

La solution cherchée est donc la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$v(t) = -0,08e^{-100t} + 0,08$$

$$v(t) = 0,08(1 - e^{-100t})$$

b.

La vitesse de la bille après 0,01 seconde de chute est :

$$v(0,01) = 0,08(1 - e^{-100 \times 0,01})$$

$$v(0,01) = 0,08(1 - e^{-1})$$

Arrondie à $0,001 \text{ m.s}^{-1}$ près, la vitesse de la bille après 0,01 seconde de chute est donc :

$$v(0,01) \approx 0,051 \text{ m.s}^{-1}$$

Question 2

a.

On cherche $U_{\max}$ et φ tels que, pour tout réel t :

$$U_{\max} \cos(100t + \varphi) = U_{\max} \cos(\varphi) \cos(100t) - U_{\max} \sin(\varphi) \sin(100t)$$

$$U_{\max} \cos(100t + \varphi) = \frac{7\sqrt{3}}{4} \cos(100t) - \frac{7}{4} \sin(100t)$$

Par identification des coefficients de $\cos(100t)$ et $\sin(100t)$:

$$U_{\max} \cos(\varphi) = \frac{7\sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad U_{\max} \sin(\varphi) = \frac{7}{4}$$

On en déduit :

$$U_{\max}^2 = (U_{\max} \cos(\varphi))^2 + (U_{\max} \sin(\varphi))^2 = \left(\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{147}{16} + \frac{49}{16} = \frac{196}{16} = \frac{49}{4}$$

puisque $U_{\max} > 0$, $U_{\max} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$

On a donc, pour tout réel t :

$$u(t) = \frac{7}{2} \cos(100t + \varphi),$$

avec $U_{\max} = 3,5$ V et $\omega = 100$ rad.s⁻¹.

b.

D'après la question précédente :

$$\cos(\varphi) = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{4}}{3,5} = \frac{7\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{\frac{7}{4}}{3,5} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{2}.$$

On reconnaît $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \frac{1}{2}$, soit :

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Question 3

On résout $f(x) = g(x)$ pour déterminer les points d'intersection des deux courbes :

$$x^2 - 2x + 4 = 7x + 4$$

$$x^2 - 9x = 0$$

$$x(x - 9) = 0$$

Les deux courbes se coupent donc en $x = 0$ et $x = 9$, ce qui correspond bien aux bornes de l'intervalle $[0 ; 9]$ visibles sur le graphique.

D'après le graphique, la courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[0 ; 9]$, donc l'aire cherchée est :

$$\mathcal{A} = \int_0^9 (g(x) - f(x)) \, dx$$

$$\mathcal{A} = \int_0^9 (7x + 4 - (x^2 - 2x + 4)) \, dx$$

$$\mathcal{A} = \int_0^9 (7x + 4 - x^2 + 2x - 4) \, dx$$

$$\mathcal{A} = \int_0^9 (9x - x^2) \, dx$$

Une primitive de $x \mapsto 9x - x^2$ sur $[0 ; 9]$ est $x \mapsto \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Donc :

$$\mathcal{A} = \left[\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^9$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{9}{2} \times 81 - \frac{1}{3} \times 729 \right) - 0$$

$$\mathcal{A} = \frac{729}{2} - \frac{729}{3}$$

$$\mathcal{A} = \frac{243}{2}$$

Question 4

Avec $E = 4 \text{ V}$, $R = 10^3 \Omega$ et $C = 2 \times 10^{-3} \text{ F}$, on a $RC = 10^3 \times 2 \times 10^{-3} = 2$ (en secondes), donc :

$$u_c(t) = 4 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right).$$

On cherche le temps t tel que $u_c(t) = \frac{E}{2} = 2$:

$$4 \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) = 2$$

$$1 - e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}$$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, cette égalité équivaut à :

$$\ln \left(e^{-\frac{t}{2}} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$-\frac{t}{2} = -\ln(2)$$

$$t = 2\ln(2)$$

Arrondi à 0,1 s près, le temps de charge nécessaire est donc :

$$t = 1,4 \text{ s}$$