

Exercice 3 - Un champion du monde inattendu (5,5 points)

En 2010, deux chercheurs entomologistes ont filmé et étudié des sauts de puces dans le but d'étudier leurs caractéristiques mécaniques.

L'objectif de cet exercice est d'étudier dans un premier temps l'un des sauts de cette étude, puis dans un second temps de le comparer au saut humain réalisé par l'athlète Arne Tvervaag, détenteur du record du monde officiel du saut en longueur sans élan depuis 1968.



D'après Journal of Experimental Biology – Février 2011

1. Étude du saut de puce le plus long

Dans cette partie, on étudie le centre de masse d'une puce, de masse m , effectuant un saut dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les frottements de l'air sont négligés. Le saut considéré comme le meilleur est celui dont la vitesse initiale est la plus élevée.

Données :

- pour discuter de l'accord du résultat d'une mesure par rapport à une valeur de référence, on utilise le quotient $\frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$ où x est la valeur mesurée, x_{ref} la valeur de référence et $u(x)$ l'incertitude-type associée à la valeur mesurée x ;
- intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- masse volumique de l'air : $\rho_{\text{air}} = 1,20 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- expression de la norme de la poussée d'Archimède : $F_A = \rho_{\text{air}} \cdot V_{\text{puce}} \cdot g$ où V_{puce} représente le volume de la puce ;
- masse de la puce : $m = 1,00 \text{ mg}$;
- volume de la puce : $V_{\text{puce}} = 4,19 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3$;

Q1. Montrer que la valeur de la poussée d'Archimède F_A exercée par l'air sur la puce est négligeable devant celle de son poids P .

La figure 1 ci-dessous est un extrait de la chronophotographie du saut de la puce. On y a ajouté le repère d'espace (Ox ; Oy) dans lequel Oy est la verticale ascendante. Le sol coïncide avec le plan $y = 0$.

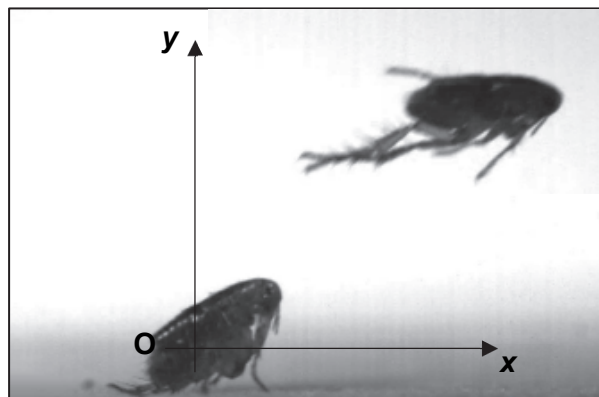


Figure 1. Extrait de la chronophotographie du saut de la puce.

Q2. Reproduire sur la copie les axes (Ox) et (Oy) de la figure 1 et faire apparaître la position initiale de la puce en O, le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$, l'angle α entre $\vec{v}_0$ et l'axe (Ox) et l'allure de la trajectoire attendue.

Q3. Établir, en utilisant une loi de Newton, les expressions des coordonnées a_x et a_y du vecteur accélération dans le repère (Ox ; Oy).

Q4. Dédurre de la question précédente les équations horaires $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la vitesse puis de la position $x(t)$ et $y(t)$ dans le repère (Ox ; Oy).

Q5. Montrer que l'équation de la trajectoire du saut de la puce est :

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha) \cdot x$$

La distance au sol parcourue durant le saut, entre le point de départ de la puce et le point où elle retombe sur le sol, est appelée la portée et notée p .

Q6. Déterminer l'expression de la portée p du saut de la puce.

Pour le saut de puce le plus long mesuré dans l'étude, on a pu mesurer $v_0 = 1,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\alpha = 45^\circ$.

Q7. Calculer la valeur numérique de la portée de ce saut et commenter le résultat.

On souhaite déterminer l'incertitude-type sur la portée du saut de puce le plus long, calculée à la question précédente, sachant que la vitesse initiale v_0 est connue avec une incertitude-type $u(v_0)$ et que l'angle initial α est connu avec une incertitude-type $u(\alpha)$. On réalise pour cela une simulation numérique d'un processus aléatoire, écrite en langage de programmation Python, et donné en figure 2.

```
1 # Importation des bibliothèques
2 import numpy as np
3 import numpy.random as rd
4
5 # Entrée des données du problème
6 v0 = ... # valeur de la vitesse initiale en m/s
7 u_v0 = 0.21 # incertitude-type sur la vitesse initiale v0 en m/s
8
9 alpha = ..... # en radian
10 u_alpha = 5.7 * np.pi / 180 # incertitude-type sur l'angle alpha en radian
11
12 g = 9.8 # en m/s²
13
14 # ..... commentaire à compléter
15 x = 2*v0**2*np.sin(alpha)*np.cos(alpha)/g
16
17 # Simulation de N = 1000 valeurs de x
18 N = 1000
19
20 v0_sim = v0 + rd.normal(0, u_v0, N) # simulation des N valeurs de v0 sous forme de tableau de valeurs
21 alpha_sim = alpha + rd.normal(0, u_alpha, N) # simulation des N valeurs d'alpha sous forme de tableau de valeurs
22
23 x_sim = 2*v0_sim**2*np.sin(alpha_sim)*np.cos(alpha_sim) / g
24
25 # Calculs des incertitudes-type
26 ecart_type = np.std(x_sim, ddof=1) # ddof=1 pour avoir l'écart-type d'échantillon et non de population
27
28 # Affichage des résultats
29 print(f"Valeur de la portée : x = {x} m")
30 print(f"Incertitude-type sur x : u(x) = {ecart_type} m")
31
```

Figure 2. Simulation numérique

Q8. Recopier sur la copie les lignes 6 et 9 du programme et les compléter avec les valeurs des paramètres expérimentaux correspondant au saut le plus long.

Q9. Écrire sur la copie un commentaire possible à la ligne 14 expliquant la ligne 15.

On donne ci-dessous le résultat affiché par le programme :

```
Valeur de la portée : x = 0.36836734693877554 m
Incertitude-type sur x : u(x) = 0.08356410024988821 m
```

Q10. À partir des résultats de la simulation, écrire la valeur de l'incertitude-type sur la portée avec deux chiffres significatifs. Écrire alors la valeur de la portée calculée avec un nombre adapté de chiffres significatifs.

La portée moyenne calculée pour l'ensemble des sauts réalisés dans l'étude vaut 17,9 cm. Cette portée est prise comme portée de référence.

Q11. Discuter de l'accord du résultat de la portée du saut de puce le plus long avec la portée de référence.

2. Record du monde de saut en longueur

Pour sauter, les puces stockent puis libèrent de l'énergie élastique comme pourrait le faire un ressort comprimé brusquement relâché. Cela leur permet de développer une puissance plus importante que par la simple contraction des muscles.

On souhaite comparer la puissance par kilogramme de muscle développée par la puce étudiée dans la partie 1 avec celle développée par Arne Tvervaag lors de son record du monde de saut en longueur sans élan de 3,71 m établi en 1968.

Données :

- Pour la puce ayant réalisé le saut le plus long :
 - masse de la puce : $m_1 = 1,00 \times 10^{-6}$ kg ;
 - la masse de muscles sollicitée lors du saut de la puce est d'environ 11 % de sa masse totale ;
 - vitesse initiale en début de saut, après l'impulsion : $v_0 = 1,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
 - durée estimée de l'impulsion : $1,2 \times 10^{-3}$ s.
- Pour Arne Tvervaag :
 - masse estimée : $m_2 = 70$ kg ;
 - la masse de muscles sollicitée lors du saut de Arne Tvervaag est d'environ 40 % de sa masse totale ;
 - vitesse initiale en début de saut, après l'impulsion : $v_2 = 6,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
 - durée estimée de l'impulsion : 0,40 s.

Q12. Après avoir calculé les énergies cinétiques en début de saut de la puce et d'Arne Tvervaag, déterminer la puissance par kilogramme de muscle développée durant l'impulsion précédant le saut par la puce et par le sauteur humain. Commenter.

Le candidat est invité à prendre des initiatives et à présenter la démarche suivie, même si elle n'a pas abouti. La démarche est évaluée et nécessite d'être correctement présentée.